Comment manger un maximum de pizza ?

• M. Albenque

Vous voilà invité chez une amie mathématicienne. Plongé dans une démonstration récalcitrante, vous avez laissé filer l'heure. Pris au dépourvu, vous arrivez chez elle avec un sérieux retard et dans les mains... une pizza. Votre amie, elle-même sans doute distraite par un autre problème, découpe celle-ci en parts de tailles ridiculement inégales (mais en suivant tout de même les rayons de la pizza). Elle vous propose poliment de vous servir. Vous prenez donc une première part, puis elle se sert à son tour, choisissant naturellement une part adjacente à la vôtre. Et ainsi de suite jusqu'à ce que toute la pizza soit mangée. Vous vous frottez déjà les mains, car vous êtes convaincu qu'avec un peu de réflexion, vous parviendrez bien à manger au moins la moitié de cette savoureuse pizza. Mais se pourrait-il que vous vous trompiez ?

1. Introduction

Alice et Bob se partagent une pizza pour le dîner. Leur pizza est déjà découpée (selon certains de ses rayons) et ils se mettent d'accord pour choisir une part *à tour de rôle* selon le protocole suivant, illustré sur la Figure 1 :

– Alice choisit la première part librement ;
– ensuite, seule une part incidente à des parts déjà mangées peut être choisie.

Cela implique en particulier, qu'à chaque tour (excepté au premier et au dernier tour), Alice et Bob ont le choix entre exactement deux parts de pizza.

On s'intéresse ici à la proportion minimale de pizza qu'Alice est sûre de pouvoir manger, quels que soient la stratégie de Bob et le découpage initial de la pizza. Lorsqu'il énonça ce problème en 2008, Peter Winkler présenta un exemple de pizza (décrit dans la section 4.1) dont Alice ne pouvait manger plus de 4/9 et il conjecturait que cette configuration était la pire possible pour Alice. Sa conjecture a été prouvée indépendamment par deux équipes de chercheurs [2, 3].

Figure 1 – Un début de répartition possible : les parts de Alice et Bob sont respectivement étiquetées A1, A2, A3 et B1, B2, B3 selon l'ordre dans lequel elles ont été choisies.

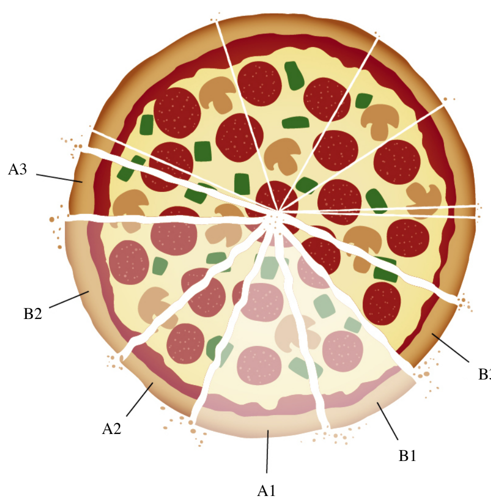
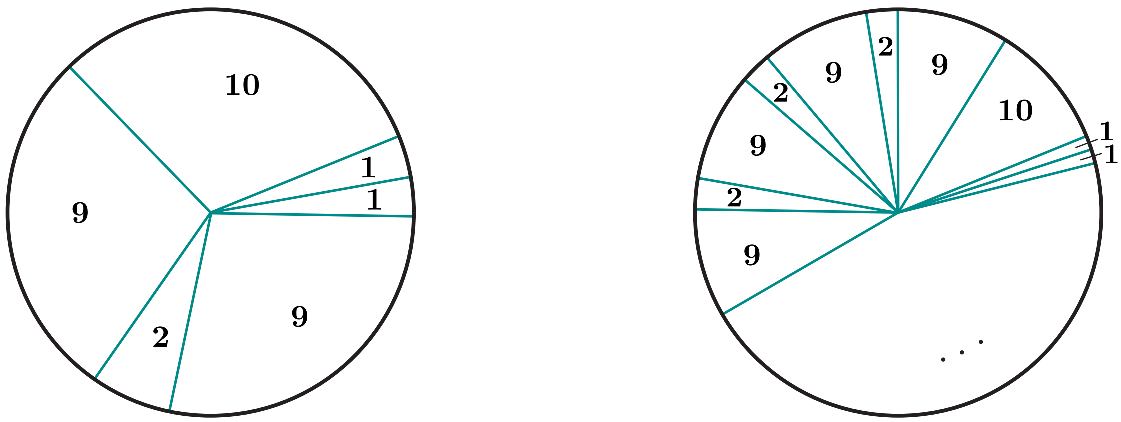


Figure 2 – Exemples de pizzas pour lesquels la stratégie gloutonne ne donne pas une solution optimale (gauche), ni même une approximation de celle-ci (droite).



Théorème 1 ([2, 3]). *La conjecture de Peter Winkler est vraie : pour toute pizza et tout découpage, il existe une stratégie permettant à Alice de manger 4/9 de la pizza.*

Nous ébauchons dans cet article les arguments principaux de la preuve établie dans [3]. La preuve complète étant longue et assez technique, nous renvoyons le lecteur curieux et motivé à l'article original et nous nous contenterons en fait de donner la preuve du résultat suivant :

Théorème 2 ([3]). *Pour toute pizza et tout découpage, il existe une stratégie permettant à Alice de manger 3/7 de la pizza.*

Remarque 1. Pour simplifier le raisonnement, nous autorisons la présence de parts de pizza de taille nulle. Si l'on préfère éviter les parts de taille nulle, il suffit de considérer dans les preuves que ces parts ont taille $\varepsilon > 0$ fixée et de faire ensuite tendre ε vers 0. Sur les illustrations, on représentera les parts de taille nulle par des parts très fines et, quand cela est nécessaire, on indiquera le poids relatif des autres parts.

2. Première stratégie : la gloutonnerie

Les stratégies « gloutonnes » (traduction française de *greedy*) forment un paradigme classique en programmation. Elles consistent à choisir à chaque étape, la stratégie qui maximise le profit immédiat. Dans le cas de notre partage de pizza, cela revient à ce qu'Alice choisisse à chaque tour la plus grande part possible. Il est facile de voir que cette stratégie n'est pas optimale pour Alice. En considérant l'exemple donné Figure 2, on peut en effet constater qu'une stratégie gloutonne permet à Alice de manger 13/32 de la pizza, alors que la stratégie optimale lui permet de manger 20/32 de pizza.

Une question naturelle est alors de savoir si la stratégie gloutonne permet de garantir une solution (certes non-optimale) qui ne diffère de la solution optimale que par un facteur constant. Autrement dit, pour un découpage fixé, notons p_{opt} la quantité minimale de pizza qu'Alice est sûre de pouvoir manger (où le minimum est pris sur les différentes stratégies de Bob) et p_{glout} la même quantité, en supposant cette fois qu'Alice suive une stratégie gloutonne. La question est alors : existe-t-il un *facteur d'approximation* $f > 0$ tel que pour toute pizza, $p_{\text{glout}} > f \cdot p_{\text{opt}}$?

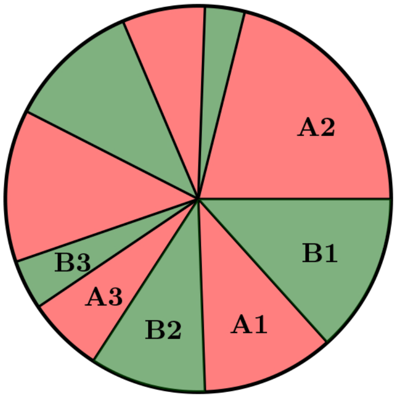
Proposition 1. *La stratégie gloutonne ne permet pas de garantir un facteur d'approximation constant pour les gains d'Alice.*

Corollaire 1. *En particulier, la stratégie gloutonne ne permet pas de garantir qu'Alice mangera une proportion fixée de la pizza.*

Pour prouver cet énoncé, on généralise l'exemple précédent. Fixons $k > 0$, on considère maintenant une pizza comportant une part de taille 10, $k+1$ parts de taille 9, k parts de taille 2 et 2 parts de taille 1, comme représenté sur la Figure 2. Pour cette pizza, $p_{\text{glout}} = 10 + 2k + 1$, tandis que $p_{\text{opt}} = 10 + 9k + 1$. En conséquent, un facteur d'approximation satisfera nécessairement $f \leqslant 2/9$.

Il suffit maintenant de considérer la même pizza où les parts de taille 9 sont remplacées par des parts de taille ℓ quelconque et la part de taille 10 par une part de taille $\ell+1$, pour voir que $f \leqslant 2/\ell$ pour tout ℓ.

FIGURE 3 – La stratégie d'Alice pour les pizzas avec un nombre pair de parts.



3. Le cas des pizzas paires

Nous commençons par traiter le cas des pizzas ayant un nombre pair de parts, appelées abusivement *pizzas paires*, et qui se révèle être beaucoup plus simple que le cas général.

Proposition 2. *Si la pizza possède un nombre pair de parts, alors il existe une stratégie qui garantit à Alice de manger au moins la moitié de la pizza (quelle que soit la réponse de Bob).*

Preuve. Commençons par colorier les parts de pizza alternativement en rouge et vert (ce qui est possible car le nombre de parts de pizza est pair), comme illustré sur la Figure 3. Sans perte de généralité, on suppose qu'au moins la moitié de la pizza est coloriée en rouge. La stratégie suivante permet à Alice de manger toutes les parts rouges (et donc plus de la moitié de la pizza). Elle commence par manger l'une des parts rouges, ensuite elle choisit toujours la part qui vient d'être « découverte » par Bob. De cette manière, Bob ne peut manger que des parts vertes. □

Le Théorème 2 étant prouvé pour les pizzas paires, on ne considère dorénavant que des pizzas ayant un nombre impair de parts, que l'on appelle *pizzas impaires*.

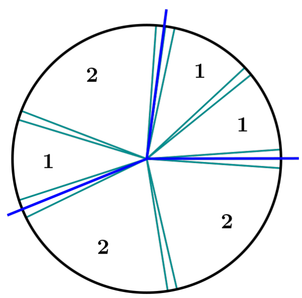
4. Le cas des pizzas impaires : premiers résultats

4.1 – L'exemple initial de Peter Winkler

À première vue, le cas des pizzas impaires semble plus favorable à Alice ; en effet dans ce cas elle mange une part de pizza de plus que Bob. De manière surprenante, il existe pourtant des pizzas avec un nombre impair de parts pour lesquelles Alice ne peut espérer manger plus de 4/9 de la pizza. L'exemple suivant, dû à Peter Winkler, en est une illustration.

Dans cet exemple, la taille totale de la pizza étant de 9, montrons que Bob peut manger au moins 5 unités de pizza. Commençons par le cas où Alice choisit une part de taille 0 au premier tour. Dans ce cas, Bob peut appliquer la même stratégie que celle utilisée par Alice dans le cas des pizzas paires, ce qui lui garantit de pouvoir manger au moins $\lceil 9/2 \rceil = 5$ unités de pizza.

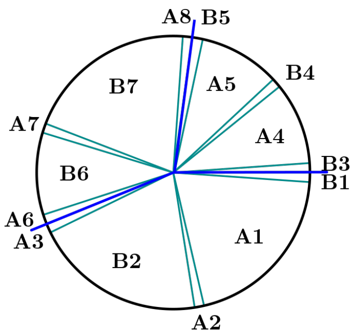
FIGURE 4 – L'exemple initial de Peter Winkler : Bob peut manger 5/9 de cette pizza.



Pour traiter les autres cas, considérons la partition de la pizza en trois secteurs représentée par les lignes épaisses de la Figure 4. Si Alice commence par manger une part de taille non nulle, Bob choisit la part incidente à une ligne épaisse. Ensuite Bob choisit toujours la part qu'Alice vient de découvrir, sauf si celle-ci se trouve dans un secteur angulaire différent de celui de la part qu'Alice vient de manger. Si les deux parts disponibles pour Bob sont dans des secteurs angulaires qui n'ont pas été touchés jusque là, il attaque le secteur angulaire de taille la plus petite.

Un exemple de cette stratégie est illustré sur la Figure 5.

Figure 5 – Un exemple d'application de la stratégie de Bob.



On peut vérifier, par une analyse au cas par cas, que si Alice joue de manière optimale, alors elle mangera une part non nulle du premier secteur angulaire exploré et les deux parts non nulles du deuxième secteur, tandis que Bob mangera l'autre part non nulle du premier secteur et les deux parts non nulles du troisième secteur. Ce qui permet de conclure la preuve.

4.2 – Une stratégie de type poursuite

Une stratégie de type « poursuite » consiste à jouer dans le même sens que le joueur précédent. Dans notre cas, une stratégie de poursuite consiste à toujours choisir la part qui vient d'être révélée. Les stratégies que nous avons décrites sont toutes de type poursuite (ou une variante d'une telle stratégie). Il est donc relativement naturel de chercher à appliquer ces stratégies pour obtenir de bons résultats dans le cas des pizzas impaires.

Proposition 3. *Alice peut manger 1/3 de n'importe quelle pizza impaire en employant une stratégie de type poursuite.*

Pour prouver cette proposition, on s'appuie à nouveau sur des coloriages de la pizza en rouge et vert. Comme le nombre de parts est cette fois impair, on introduit une variante des coloriages alternants :

Définition 1. Un coloriage *pseudo-alternant* d'une pizza impaire est un coloriage de ses parts en rouge et vert, tel que des parts voisines sont de couleurs différentes à l'exception de deux parts rouges, comme illustré sur la Figure 6. On appelle *coupe du coloriage* la ligne de découpe entre les deux parts rouges voisines.

Preuve (de la Proposition 3). Comme dans la preuve de la Proposition 2, on considère un coloriage des parts de la pizza en rouge et vert, où les parts rouges et vertes correspondent – au moins dans un premier temps – aux parts respectivement mangées par Alice et Bob. Supposons qu'Alice poursuive Bob. Le coloriage que l'on obtient est pseudo-alternant.

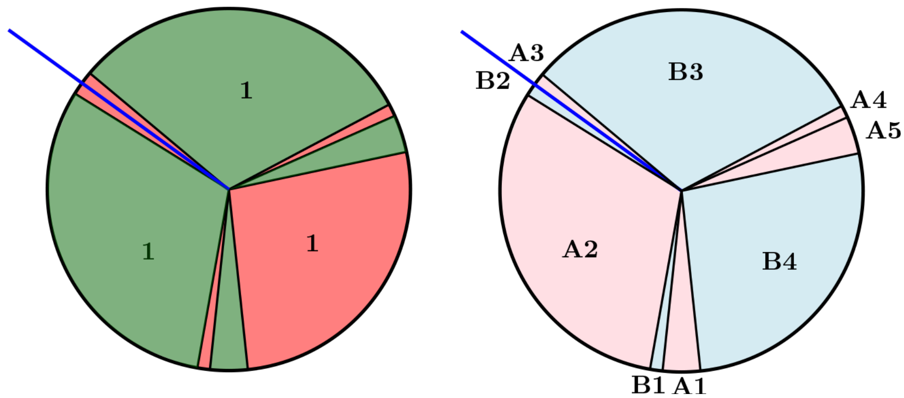
Considérons maintenant l'ensemble des coloriages pseudo-alternants de la pizza. Si, dans tous ces coloriages, la proportion de pizza coloriée en rouge est supérieure à 1/3 alors une stratégie de type poursuite garantit à Alice de pouvoir manger 1/3 de la pizza et la proposition est prouvée. Sinon, considérons un coloriage pseudo-alternant dont la proportion de pizza rouge est inférieure à 1/3. Notons respectivement R et V la proportion de pizza rouge et verte. Soit alors p une part verte telle que la taille totale des parts vertes comprise entre p (inclus) et la coupe du coloriage soit au moins égale à la moitié de V (dans les deux directions). Intuitivement, la part p est la part verte située « au milieu » des parts vertes. Alice peut maintenant suivre la stratégie suivante : elle mange la part p en premier et elle poursuit Bob. De cette façon, elle est sûre de manger toutes les parts vertes comprises entre p et la coupe du coloriage dans au moins une des deux directions. Elle mange donc au moins $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de pizza. □

La borne inférieure de 1/3 pour les stratégies de poursuite que nous venons d'établir est optimale. En effet, on peut se convaincre qu'Alice ne pourra manger plus d'un tiers de la pizza représentée sur la Figure 6 si elle se contente de poursuivre Bob. D'un autre côté, il est facile de voir qu'Alice peut manger 2/3 de la pizza si elle adopte une autre stratégie. On verra dans la section suivante, comment raffiner les stratégies de poursuite afin de se rapprocher de la borne de 4/9.

5. Poursuite et tripartition de pizzas

Reprenons la stratégie de type poursuite définie ci-dessus. Heuristiquement, le problème pour Alice dans ce type de stratégie est que dès qu'elle a choisi la première part, tout le jeu est déterminé. En effet, Bob peut facilement calculer quel coloriage pseudo-alternant lui sera le plus favorable et jouer en conséquence. On a vu que dans certains cas (cf. Figure 6), cela conduit à un gain pour Alice beaucoup moins favorable que celui qu'elle pour-

Figure 6 – Un coloriage pseudo-alternant dans lequel l'aire des parts rouges représente moins de 1/3 de la pizza (gauche). Exemple de stratégie d'Alice qui lui garantit au moins 1/3 de la pizza.



rait espérer obtenir. Dans l'exemple ci-dessus, on voit qu'une stratégie optimale pour Alice, consiste à suivre Bob à tous les tours *sauf* à un d'entre eux (le deuxième en l'occurence).

On va chercher donc à voir si cette observation peut se généraliser et si on peut garantir une bonne performance à Alice si elle suit une *stratégie de poursuite modifiée* dans laquelle elle suit Bob à tous les tours sauf à l'un d'entre eux. L'idée générale décrite dans cette partie est que si Alice ne peut pas obtenir la moitié de la pizza avec une stratégie de poursuite simple, alors il existe un découpage de la pizza en trois parties qui satisfait à de bonnes propriétés. En s'appuyant sur ce découpage, on peut ensuite exhiber une stratégie de poursuite modifiée qui garantit 3/7 de la pizza à Alice.

5.1 – Meilleure réponse et tripartition

Si Alice utilise une stratégie de poursuite, on a vu qu'il suffit à Bob de calculer quel coloriage pseudo-alternant lui sera le plus favorable et de jouer en conséquence. En d'autres termes, il lui suffit de calculer la coupe du coloriage pseudo-alternant, dont l'aire des parts vertes est maximale sachant que la première part p choisie par Alice doit être rouge. On appelle *meilleure réponse (de Bob)* à p le choix de cette coupe.

Définition 2. Parmi toutes les coupes qui sont des meilleures réponses, on note respectivement $\mathcal{C}_{\text{worst}}$ et $\mathcal{C}_{\text{best}}$ l'ensemble des coupes qui minimisent et maximisent le gain d'Alice.

Si, dans un coloriage associé à une coupe de $\mathcal{C}_{\text{best}}$, l'aire des parts rouges est inférieure à 1/2 (autrement dit, si Alice ne peut espérer manger plus de la moitié de la pizza en poursuivant Bob), on dit que la pizza est *difficile*.

Étant données deux coupes C_1 et C_2, la pizza est naturellement divisée en deux parties dont l'une (partie impaire) comporte un nombre impair de parts et l'autre (partie paire) un nombre pair. On peut ensuite numéroter les parts de la partie impaire, ce qui nous permet de définir les *parts impaires* et les *parts paires* qui sont respectivement numérotées par un nombre impair ou pair. Sur les illustrations, on représente en rouge les parts impaires et en vert les parts paires.

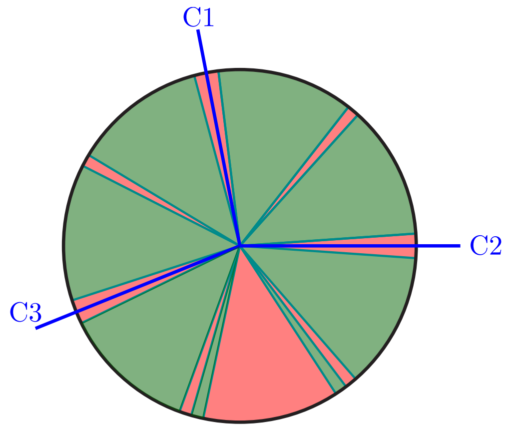
Proposition 4 ([3]). *Si une pizza est difficile, alors il en existe un découpage en trois parties qui vérifient les propriétés suivantes. Si on liste (dans le sens horaire) C_1, C_2, C_3 les 3 coupes qui déterminent le découpage, alors la coupe C_1 appartient à $\mathcal{C}_{worst}$, la coupe C_2 à $\mathcal{C}_{best}$ et C_3 est une meilleure réponse à une part paire située entre C_1 et C_2.*

De plus, l'aire des parts paires dans chaque partie est supérieure à celle des parts impaires.

5.2 – Stratégie pour 3/7

En s'appuyant sur la tripartition d'une pizza définie à la section précédente, on peut élaborer une nouvelle stratégie pour Alice. Observons d'abord que si Alice suit une stratégie de type poursuite associée à l'une des coupes de la tripartition, alors elle mangera les parts paires d'un secteur et les parts impaires de deux secteurs (cf. Figure 7). Lorsque toute l'aire de la pizza est portée par des parts paires (comme c'est le cas dans les exemples représentés sur la figure 4), cette stratégie ne donne pas de bons résultats. Pour augmenter le gain d'Alice, il faut donc essayer de manger plus de parts paires ! C'est ce qu'on se propose de faire dans cette section. Commençons par obtenir un premier résultat sur les tailles respectives des parts paires et impaires.

Figure 7 – Un exemple de tripartition d'une pizza vérifiant les conditions de la proposition 4. Les parts impaires sont colorées en rouge et les parts paires en vert.



Soit G_1 le secteur angulaire situé entre les coupes C_2 et C_3 et soient o_1 et e_1 les aires respectives des parts impaires (odd) et paires (even) de G_1. (On définit G_2, G_3, o_2, o_3, e_2 et e_3 de manière similaire). Dans une stratégie de poursuite associée à C_1, le gain d'Alice sera égal à $e_1 + o_2 + o_3$ et de manière similaire ceux associés respectivement à C_2 et C_3 sont égaux à $o_1 + e_2 + o_3$ et $o_1 + o_2 + e_3$. Par définition de $\mathcal{C}_{\text{worst}}$ et $\mathcal{C}_{\text{best}}$, on obtient donc en particulier que :

$$e_1 + o_2 + o_3 \leqslant o_1 + o_2 + e_3 \leqslant o_1 + e_2 + o_3. \qquad (1)$$

Soit maintenant p_1 la pièce paire située *au milieu* de G_1, comme défini dans la preuve de la Proposition 3, c'est-à-dire que l'aire des parts paires situées entre p_1 et C_2 d'une part et entre p_1 et C_3 d'autre part est supérieure à $e_1/2$. (On définit p_2 et p_3 de manière similaire). La *stratégie de poursuite modifiée associée* à C_1 est définie ainsi :

1. Alice commence par manger p_1 ;
2. tant que Bob choisit des parts qui ne sont pas voisines de C_2 ou de C_3, Alice le suit ;
3. au moment où Bob révèle une part de G_2 ou de G_3, Alice *ne le suit pas* et choisit l'autre part possible ;
4. ensuite, Alice suit Bob jusqu'à la fin du jeu.

En suivant un raisonnement analogue à celui de la Proposition 3, on peut voir qu'Alice mange ainsi au moins la moitié des parts paires de G_1. Il reste donc à étudier la parité du nombre des parts qu'elle mange dans les autres secteurs. Il est d'abord important de noter que la meilleure réponse pour Bob évolue au fur et à mesure du jeu. Si Alice commence par manger une part paire du secteur G_1 et poursuit ensuite Bob, alors la meilleure réponse est la coupe C_1. En revanche, si Alice se met à suivre Bob alors qu'une partie de la pizza a été mangée (comme c'est le cas après (3)), la meilleure réponse de Bob peut être différente. Dans notre cas, et en s'appuyant sur les propriétés de la tripartition, on peut prouver le lemme suivant :

Lemme 1. *Après (3), au moins une des deux coupes C_2 et C_3 constitue une meilleure réponse (pour Bob).*

En s'appuyant sur le Lemme 1, on peut déduire qu'Alice mange au moins une quantité de pizza égale à $e_1/2 + e_2 + o_3$ (si C_2 est une meilleure réponse) ou $e_1/2 + o_2 + e_3$ (si C_3 est une meilleure réponse). En appliquant l'inégalité (1), on obtient donc qu'Alice mange au moins $e_1/2 + o_2 + e_3$ de pizza.

Preuve (Preuve du Théorème 2). On considère les trois stratégies suivantes :

1. la stratégie de poursuite associée à C_2 qui garantit au moins $o_1 + e_2 + o_3$ à Alice ;
2. la stratégie modifiée associée à C_1 qui garantit au moins $e_1/2 + o_2 + e_3$ à Alice ;
3. la stratégie modifiée associée à C_3 qui garantit au moins $e_1 + o_2 + e_3/2$ à Alice.

En additionnant les gains des stratégies (2) et (3) et 3/2 fois le gain de la stratégie (1), on obtient :

$$\frac{3}{2}(o_1 + e_1 + o_2 + e_2 + o_3 + e_3) + \frac{1}{2}o_2,$$

Autrement dit, les gains d'Alice pondérés par 3.5 sont au moins égaux à 3/2 fois la taille de la pizza. En conséquent, au moins l'une de ces stratégies doit apporter à Alice une proportion de pizza supérieure à $\frac{3}{2}/3.5 = \frac{3}{7}$. □

La borne de 3/7 prouvée dans ce théorème est optimale pour cette stratégie. On peut en effet se convaincre qu'Alice ne peut manger plus de 3/7 de la pizza représentée sur la Figure 7, en utilisant uniquement une stratégie de type poursuite modifiée.

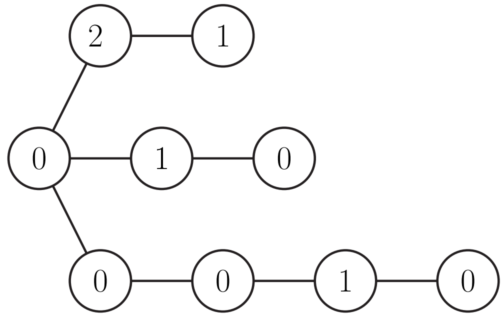
La preuve complète du Théorème 1 donné dans [3] est un raffinement supplémentaire de cette stratégie, dans lequel on considère une tripartition du secteur G_1. Les arguments sont similaires à ceux utilisés ici et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article original.

6. Perspectives et généralisations : manger des graphes ?

Le problème de la pizza a été généralisé de la façon suivante dans [1, 4, 5]. Étant donné un graphe G avec des poids sur ses sommets, Alice et Bob choisissent à tour de rôle des sommets tels que (*Variante 1*) l'ensemble des sommets *choisis* à chaque instant du jeu soit connexe ou (*Variante 2*) l'ensemble des sommets *non-choisis* soit connexe et en cherchant à maximiser la somme des poids des sommets qu'ils ont choisis. Le cas « pizza » correspond à un graphe G cyclique dans l'une ou l'autre des variantes.

De petits exemples montrent que l'on ne peut pas espérer obtenir de généralisations du Théorème 1 aux graphes généraux que ce soit pour la variante 1 ou la variante 2 du problème. Cependant, en imposant des conditions sur la structure du graphe et sur la parité du nombre de ses sommets, on peut garantir à Alice de bonnes performances. Pour la variante 1, Micek et Walczak [5] ont construit des exemples de graphes très simples (arbres, ...) avec un nombre pair de sommets pour lesquels le gain d'Alice était arbitrairement petit. En revanche, le cas de graphes avec un nombre pair de sommets lui est plus favorable ; dans le cas d'un arbre, il est prouvé qu'elle peut en manger au moins 1/4. Déterminer la valeur exacte de la proportion minimale qu'Alice peut manger dans ce cas est un problème ouvert : des exemples montrent que celle-ci est inférieure à 2/5 (voir Figure 8), mais rien de plus précis n'est connu.

Figure 8 – Dans la variante 1, Alice ne peut manger que 2/5 de cet arbre.



Pour la variante 2, le rôle des parités est échangé : Micek et Walczak ont construit des graphes simples de taille impaire pour lesquels, dans cette variante, le gain d'Alice était arbitrairement petit et ont montré qu'Alice pouvait obtenir 1/4 du poids total si elle mangeait un arbre de taille pair. Seacrest et Seacrest [6] ont ensuite montré qu'Alice pouvait même manger la moitié de l'arbre, résolvant ainsi une conjecture de Micek et Walczak. Les mêmes auteurs ont également conjecturé qu'il existait une constante $c > 0$ telle qu'Alice pouvait toujours obtenir une proportion c du poids total d'un graphe biparti avec un nombre pair de sommets. Ce résultat n'est pour le moment établi que pour les arbres de taille paire.

Références

[1] J. Cibulka et al. « Graph sharing games: complexity and connectivity ». In : *Theory and applications of models of computation*. Springer, 2010, p. 340–349.

[2] J. Cibulka et al. « Solution of Peter Winkler's Pizza Problem ». In : *Fete of combinatorics and computer science*. Springer, 2010, p. 63–93.

[3] K. Knauer, P. Micek et T. Ueckerdt. « How to eat 4/9 of a pizza ». *Discrete Mathematics* **311**, nº 16 (2011), p. 1635–1645.

[4] P. Micek et B. Walczak. « A graph-grabbing game ». *Combinatorics, Probability and Computing* **20**, nº 04 (2011), p. 623–629.

[5] P. Micek et B. Walczak. « Parity in graph sharing games ». *Discrete Mathematics* **312**, nº 10 (2012), p. 1788–1795.

[6] D. E. Seacrest et T. Seacrest. « Grabbing the gold ». *Discrete Mathematics* **312**, nº 10 (2012), p. 1804–1806.

Marie Albenque
Marie Albenque est chargée de recherche cnrs au Laboratoire d'informatique de l'École polytechnique. Ses thématiques de recherche sont les probabilités discrètes et la combinatoire énumérative et bijective.

Ce texte reprend principalement les idées et l'organisation de [3], dont je remercie les auteurs pour m'avoir laissée utiliser certaines de leurs illustrations et en particulier Kolja Knauer pour de nombreuses discussions sur le partage de pizzas.